# PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA (COP)



È un problema di ottimizzazione in cui l'insieme ammissibile è definito in termini di strutture combinatorie, come grafi.
Questi insiemi ammissibili sono DISCRETI, tuttavia la COP ≠ PLI, in quanto la PLI è più vasta.
Le caratteristiche di un problema di ott. combinatoria sono:

- Un insieme di oggetti (ground set) $N$ su cui lavorare (ad esempio, gli oggetti che compongono uno zaino)
- Un insieme $\mathcal{F}$ di soluzioni ammissibili di $N$ tali che esse rispettano i vincoli previsti dal COP. La loro massima numerosità è $2^N$.
- Un costo/profitto $c_j \quad \forall j \in N$
- Il costo di $F \in \mathcal{F}$ è $c(F) = \sum_{j \in F} c_j$

  $F$ è un elemento di $\mathcal{F}$, ovvero è una soluzione ammissibile. È anche sottoinsieme di $N$.
- La funzione obiettivo è $\boxed{\max \{ c(F) \mid F \in \mathcal{F} \}}$

ATT: c può essere interpretato anche come un "valore", in questo caso ha più senso la ricerca del massimo

NOTA: Ogni COP potrebbe essere risolto enumerando tutte le possibili $F \in \mathcal{F}$ e andando a vedere qual'è il max $c(F)$ ..., ma tali enumerazioni sono generalmente in n° esponenziale!

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

# MODELLAZIONE CON VARIABILI BINARIE

Le variabili binarie possono essere usate per molte cose, come: modellare decisioni SÍ/NO, applicazione di disgiunzioni, condizioni logiche, modellare costi fissi e funzioni lineari a tratti



## DECISIONI SÍ/NO

Formuleremo di seguito la modellazione di problemi classici.

### Esempio 1 ZAINO BINARIO

Ho un insieme di oggetti $J = 1, \dots, n$.
Ogni oggetto ha un valore $p_J$ e un peso $w_J$.
Il mio zaino regge al massimo un peso $b$,
Come posso massimizzare il valore dello zaino rispettando il vincolo sul peso? Associo una variabile $x_J$ a ciascun oggetto, con $x_J$ così definita:

$$x_J : \begin{cases} 1 & \text{se il } J\text{-esimo oggetto viene caricato nello zaino (ovvero, viene scelto)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max \sum_{J=1}^{n} p_J x_J \\ \text{s.t.} \sum_{J=1}^{n} w_J x_J \leq b \\ x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$

s.t. = "subject to", ovvero "sottoposto ai vincoli".
Inoltre, $x_J \in \{0,1\}^n$
$\{0,1\}^n = \mathbb{B}^n$

ATTI $\sum_{J=1}^{n} w_J x_J \leq b$ è il prodotto matriciale fra la matrice dei pesi $W^{1 \times J} = (w_1, \dots, w_n)$ e la matrice degli oggetti $X^{J \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_J \end{pmatrix}$.
Il risultato è un numero unico (matrice $1 \times 1$) il cui valore può essere confrontato con $b$
$\{0,1\}^n$ è una matrice $1 \times n$ che può valere solo 0 o 1 (i cui elementi)
ad esempio $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Si noti come il problema dello zaino lineare possa essere visto anche come un problema di massimizzazione di profitto di $J$ progetti, ognuno portante un profitto $P_j$ e che richiede un investimento $w_j$. $b$ rappresenterebbe il budget disponibile.

## Esempio 2 — PROBLEMA DELL'ASSEGNAMENTO LINEARE

Ho $n$ lavoranti (persone) e $m$ lavori.
Ogni lavoro $i$-esimo, con $i = 1, \dots, m$ deve essere svolto esattamente da una persona
Ogni persona $J$-esima, con $J = 1, \dots, n$ può svolgere al massimo un solo lavoro.
Il costo della persona $J$ per fare il lavoro $i$ è $C_{iJ}$.
Il problema stavolta è un problema di minimo, voglio trovare la combinazione di costi minore.
Sfrutto la variabile $X_{iJ}$ così definita:

$$X_{iJ} = \begin{cases} 1 & \text{se la persona } J \text{ svolge il lavoro } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \Rightarrow X \in \{0,1\}^{mn}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Allora

$$\begin{cases} (1) & \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{J=1}^{n} C_{iJ} X_{iJ} \\ & \text{s.t.} \\ (2) & \sum_{J=1}^{n} X_{iJ} = 1 \qquad \forall\, i = 1, \dots, m \quad \forall \text{ lavoro } i \\ (3) & \sum_{i=1}^{m} X_{iJ} \leq 1 \qquad \forall\, J = 1, \dots, n \quad \forall \text{ persona } J \end{cases}$$

(1) ci dice che dobbiamo vedere quali sono la combinazione migliore tale che la somma dei costi reali (per i quali $X_{iJ} = 1$) è minima

(2) Significa: tengo fermo il lavoro $i$. Faccio variare le $n$ persone e mi assicuro (grazie all'$=$) che 1 e 1 sola svolga il lavoro $i$.

(3) Significa: tengo ferma la persona $J$. Faccio variare gli $m$ lavori e mi assicuro (grazie al $\leq$) che al più **1** lavoro sia eseguito dalla quella persona

# CONDIZIONI LOGICHE E COSTI FISSI



Usare le variabili binarie per modellare condizioni come:

- al massimo
- esattamente
- al minimo, almeno

nella selezione di elementi da un insieme M

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Sia $M = \{1, \dots, m\}$ un insieme finito di m oggetti
- Sia $\{M_J\}$ una famiglia (ovvero insieme di sottoinsiemi) di M con $J \in N = \{1, \dots, n\}$. N è l'insieme degli indici di M. Ogni J è un indice per denominare M, quindi ho n sottoinsiemi di M.

- Diremo che $F \subseteq N$ è una copertura di M se $\boxed{\bigcup_{J \in F} M_J = M}$ (unione)
  Questo soddisfa la condizione logica "almeno", perché ogni elemento di M è coperto da almeno un elemento di F, che è la copertura di M. F lo scegli tu: è possibile indici di N. F è un insieme di sottoinsiemi di M e ne dà gli indici che selezionano

- Diremo che $F \subseteq N$ è un packing di M se $\boxed{M_J \cap M_K = \emptyset}$,
  $\forall (J, K) \in F$ con $J \neq K$.
  Questo soddisfa la condizione logica "al massimo", perché ogni elemento di M è soddisfatto al massimo da un elemento di F.

- Diremo che $F \subseteq N$ è una partizione di M se F è sia una copertura che un packing di M. Questo soddisfa la condizione logica "esattamente".

- Definiremo una matrice di incidenza $A_{m \times n}$ della famiglia $\{M_J\}$:
  - ogni riga di A rappresenta un elemento dell'insieme M
  - ogni colonna di A rappresenta un sottoinsieme $M_J$ degli elementi.

RICORDA: l'elemento $A_{ij}$ di A vale 1 se i e j sono in relazione.
Che tipo di relazione? Quello che scegliamo noi per il problema in questione.

Possiamo associare una variabile binaria a ogni sottoinsieme così:

$$x_{j \in N} = \begin{cases} 1 & \text{se il sottoinsieme di indice } j \text{ è SELEZIONATO} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Posso dunque modellare il problema come un problema di programmazione intera (in particolare, binaria) così:

$$\text{SET-COVERING PROBLEM} \begin{cases} \min \ c^T x \\ \text{s.t.} \ Ax \geq 1 \\ x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$

ipotizzando $c_j$ = vettore dei costi per gli $n$ sottoinsiemi, con $j \in N$

infatti $N = \{1, \dots, n\}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Esempio (per capire i simboli)

$M = \{1,2,3\}$ è un insieme composto da numeri 1, 2, 3.

Considero (scelta arbitraria) dei sottoinsiemi di M:

$M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{1,3\}$, $M_3 = \{2,3\}$, $M_4 = \{1,2,3\}$

N allora è $N = \{1,2,3,4\}$

Per ottenere una copertura di M, posso scegliere $F \subseteq N$ con

$F = \{2,3\}$. Infatti, $M_2 \cup M_3 = \{1,2,3\} = M$.

$F = \{2,3\}$ non costituisce però un packing, in quanto $M_2 \cap M_3 = \{3\} \neq \emptyset$

Per avere un packing potrei prendere banalmente $F = \{4\}$ oppure $F = \{1,3\}$. Notiamo che $F = \{1,3\}$ è anche partizione di M.

Vediamo ora la matrice di incidenza A. A è una matrice $3 \times 4$.

3 perché gli elementi di M sono 3, 4 perché i sottoinsiemi di M considerati (cioè scelti arbitrariamente da me) sono 4.

| A = | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |

In questo caso la relazione è: "il sottoinsieme include l'elemento"

N.B: di solito in una matrice d'incidenza,
le COLONNE sono le variabili
le RIGHE sono i vincoli